數學專業多元微積分教學的幾點體會

劉軾波

廈門大學數學系

本文介紹了我在廈門大學數學系為二年級第 1 學期的本科生講授多元微積分的一些做法。我們特別強調向量值函數的微分學和將實際問題轉化為積分的微元分析法。另外, 我們舉例說明如何把學生已掌握的線性代數和常微分方程知識引入多元微積分中來, 得到有重要意義的結果。

1 引言

數學分析是數學類專業本科生最重要的基礎課, 因此各高校的數學院系對這門課都極為重視。2009 年, 我國啟動基礎學科拔尖學生培養試驗計畫。從 2014 年秋季起, 廈門大學數學科學學院對入選該計畫的本科生的主要課程實行小班教學, 由我負責該班二年級第 1 學期的數學分析 (即數學分析 3) 的教學工作。這門課的主要內容就是多元微積分。為了行文方便, 下文中的數學分析也專指多元微積分。

對這些優秀學生實行小班教學的意圖, 當然是希望在教學內容等方面突破傳統教材的框架, 力求有所創新, 更好地完成數學人才培養任務。因此, 我對這門課進行了一些思考和探索, 逐步形成了有特色的課程內容體系, 在幾年的教學過程中逐步形成了一份講義 [4]。此外, 我與教過的本科生合作, 發表了兩篇關於多元微積分的論文 [19, 20]; 這些結果現在已經成為我的課程的標準內容。此外, 我在北京大學、北京師範大學、南京大學和浙江大學等高校為本科生做有關的學術報告 [5], 介紹我們在數學分析方面的工作; 2017 年、2018 年應邀在復旦大學舉辦的數學分析教學研討會做報告。

2019 年 6 月, 我應邀在國家天元數學東南中心舉辦的數學專業課程建設研討會做報告[1]。本文是根據這個報告的內容整理而成。

[1]此次課程建設研討會網址:
. http://tianyuan.xmu.edu.cn/activities/19-20/sxkc2019/index.html

作者感謝北京大學張恭慶院士對基礎課教學工作的關心和邀請我到北京大學做報告, 感謝復旦大學樓紅衛教授連續兩次邀請我到復旦大學舉辦的數學分析教學研討會做報告, 感謝安排我為本科生做報告的有關高校。作者的教學改革和科學研究工作分別受到教育部基礎學科拔尖學生培養試驗計畫 (20180707) 以及國家自然科學基金項目 (11671331) 的資助。

2 課程現代化及與現代數學的聯繫

現代數學很多內容都是高維的, 適應向量記法並能熟練操作向量值函數, 是成為優秀數學家必須的素養。因此, 我在講授多元微積分時, 特別強調向量的記法以及向量值函數. 可能很多人都已經意識到: 數學分析中很多概念和定理, 用分量形式表達非常繁瑣, 而用向量形式則非常簡潔, 並且更能凸顯數學內容的實質和內在聯繫; 這應該已經成為很多同行的共識了。除此之外我在教學中還進一步發現: 若不涉及向量值函數, 則無法充分展現微分學的基本思想! 這一點我們將在下文進一步闡述 (見注 3.3)。由此可見, 在多元微積分教學中仔細講解向量值函數, 是在教學中應該提倡的一項舉措。

數學分析通常被認為是一門古老的學問。其實, 只要細加研究, 是可以發現數學分析的內容與現代數學的一些聯繫的。我們在教學中, 應該善於找到這些聯繫並展現給學生. 以下我結合自己的教學實踐舉幾個例子。

例 2.1. $\mathbb{R}^m$ 中不存在既開又閉的非空真子集。

眾所周知, 在拓撲學中這個結論就是 $\mathbb{R}^m$ 的連通性。在拓撲課中一般是先利用確界討論得到 $\mathbb{R}$ 的連通性, 再由連通空間的乘積空間也連通得到 $\mathbb{R}^m$ 的連通性。當然, 如果先證明道路連通空間必連通, 則這個結論也可以直接由 $\mathbb{R}^m$ 道路連通這個顯而易見的事實推出。以下我們提供一個更直觀的證明。

證. 設 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集 U 既開又閉, $U \neq \mathbb{R}^m$。取 $a \in \mathbb{R}^m \backslash U$, 因 U 閉, 有 $x \in U$ 使

$$|x-a| = \inf_{y\in U} |y-a| .$$

因 U 開, 可在 x 附近取點 $x' \in U$ 使 $|x'-a| < |x-a|$; 這就與上式矛盾。

我們在數學分析課中介紹這個簡單的例 2.1, 是為了得到以下經典結果。

例 2.2. 設 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是 C^1-映射, 對 $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\det f'(x) \neq 0$。若 f 是強制的, 即 $|x| \to \infty$ 時 $|f(x)| \to \infty$, 則 $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$。

證. 事實上, 運用反函數定理, 由 f 的 Jacobi 行列式處處非零可知 f 的值域為開集; 由 f 強制可知 f 的值域為閉集。因此由例 2.1 即知 f 的值域是 $\mathbb{R}^m$。

注 2.3. 例 2.2 的結論相當於對 $\forall b \in \mathbb{R}^m$, 都有 $x \in \mathbb{R}^m$ 使 $f(x) = b$。因此例 2.2 可以看作非線性代數方程組的求解問題。此例也可以通過研究 $\varphi : x \mapsto |f(x) - b|^2$ 的最值來證明。進一步, 對 φ 應用山路定理 [12], 還可以證明在例 2.2 的條件下 f 是單射, 因此 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是微分同胚, 詳見 [17]。

鑒於方程的求解是數學的中心問題, 以及例 2.2 的簡單性, 我們認為任何學過多元微積分的數學類本科生都應該至少知道例 2.2 的上述兩種證明方法。不幸的是在某些 985 高校, 即使是入選拔尖計畫的優秀學生也完全不知道這個例子。

注 2.4. 在 [19] 中, 我們把例 2.2 的結論推廣為: 設 $n \geq 2$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1-映射, 僅有至多有限個 $x \in \mathbb{R}^m$ 使 $\operatorname{rank} f'(x) < n$。若 $f(\mathbb{R}^m)$ 是閉集, 則 $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$。由這個結果, 我們立刻得到代數基本定理。

變分方法在近現代數學中有重要的地位。我們在多元函數積分學部分, 作為散度定理的應用, 可以用變分的思想推導極小曲面方程; 這是把泛函極值問題轉化為求解偏微分方程。為了研究數學、物理中一些重要的非線性偏微分方程解的存在性, 我們也可以反其道而行之, 把方程求解的問題歸結為尋找某個能量泛函的極值點或更一般的臨界點, 這就是非線性微分方程的變分方法 [10, 14]。在數學分析這樣的基礎課中當然不可能過多涉及偏微分方程, 但是通過研究非線性代數方程來展示變分方法的威力, 應該是很有趣的。

例 2.5. 設 $A = (a_i^j)_{m\times m}$ 是正定矩陣, $\theta \in (1, 2)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^m)$ 滿足 $|F(x)| \leq C(1 + |x|^\theta)$, $f = \nabla F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$。則非線性代數方程組

$$\sum_{i=1}^m a_i^j x^i = f^j(x^1, \ldots, x^m), \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

即 $Ax = f(x)$ 有解。

證. 考慮 C^1-函數 $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$,

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}Ax\cdot x-F(x).$$

則 $|x|\to\infty$ 時 $\Phi(x)\to+\infty$, 於是 Φ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的某點 ξ 達到最小值。由多元函數極值的必要條件 (Fermat 定理) 我們有 $\nabla\Phi(\xi)=0$, 即 $A\xi=f(\xi)$。這 ξ 就是 $Ax=f(x)$ 的解。

作為我們在 [20] 中給出的 m-重積分換元公式新證明的簡單推論, 我們立刻得到 m-維 Brouwer 不動點定理 (見注 4.8)。不動點理論也是現代數學中的重要內容, 應用 Brouwer 不動點定理我們可以改進例 2.5 的結果。在以下的例 2.6 中, A 不必是對稱矩陣, f 也不必是某個數量值函數 F 的梯度。

例 2.6. 設 A 是 m-階可逆矩陣, $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 連續且

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|}=0, \tag{2.1}$$

則非線性代數方程組 $Ax=f(x)$ 有解。

設 $b\in\mathbb{R}^m$, 常值映射 $f:x\mapsto b$ 顯然滿足例 2.6 要求的條件. 於是由例 2.6 可知當 A 是可逆矩陣時, 非齊次線性方程組 $Ax=b$ 有解。因此例 2.6 可以看作線性代數中的 Cramer 法則的非線性推廣。方程組 $Ax=f(x)$ 的求解問題等價於求映射 $g:x\mapsto A^{-1}f(x)$ 的不動點。運用 (2.1) 我們可以找到充分大的 $r>0$ 使 $g(\bar{B}_r)\subset\bar{B}_r$, 這裡 $\bar{B}_r$ 是球心在原點半徑為 r 的閉球, 於是可以應用 Brouwer 不動點定理得到 $g:\bar{B}_r\to\bar{B}_r$ 的不動點。具體細節我們留給讀者。

3 充分展現微積分的基本思想

進行多元微積分的教學, 當然應該透徹地講清楚微積分的基本思想, 把它展現在學生面前。我們先來談微分學, 首先回顧一下非線性映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 在點 $a\in\mathbb{R}^m$ 的導數的概念。如果有 $n\times m$ 矩陣 A, 使得當 $h\to 0$ 時

$$f(a+h)-f(a)=Ah+o(|h|), \tag{3.1}$$

就稱 f 在點 a 可微; 並將由此性質唯一確定的 A 稱為 f 在 a 的 (全) 導數, 記為 $f'(a)$。熟知, A 其實就是 f 在 a 點的 Jacobi 矩陣。當然, 我們也可以把 $A=f'(a)$ 視為 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的線性映射。

從定義來看, 線性映射 $f'(a)$ 是非線性映射 $h \mapsto f(a+h)-f(a)$ 的近似, 因此有時也稱其為 f 在 a 點的線性化。由於線性映射比非線性映射容易研究, 我們很自然就希望能夠通過考察 $f'(a)$ 來研究 f。

我們認為微分學的基本思想就是通過研究非線性映射 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 在點 a 的導數 $f'(a)$ 來推斷 f 在 a 附近的局部性質。大體上說: $f'(a)$ 如何, f 就大約如何 (見例 3.1)。這裡需要向學生強調的是, 由於 f 在 a 點的可微性以及其導數的值都只與 f 在 a 點附近的行為有關, 所以我們只能期望得到 f 在 a 點附近的局部性質。我們來看一個典型的例子。為了方便起見, 我們用 $\mathcal{N}_a$ 表示含 a 的開集構成的集族。

例 3.1. 設 $\Omega \in \mathcal{N}_a$, $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ 是 C^k-映射。

(1) 若 $f'(a):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 可逆 (必 $m=n$), 則 f 在 a 局部可逆。即有 $U \in \mathcal{N}_a$ 及 $V \in \mathcal{N}_{f(a)}$ 使 $f:U\to V$ 是雙射, 且 f^{-1} 也是 C^k-映射。

(2) 若 $f'(a):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是滿射 (必 $m \ge n$), 則 f 在 a 局部滿。其確切含義是: $b=f(a)$ 是 $f(\Omega)$ 的內點。也就是說 b 點附近的點都在 f 的值域中, 所以我們把這個結論稱為局部滿射定理。特別地, 如果對 $\forall x \in \Omega$, $f'(x)$ 都是線性滿射, 則 $f(\Omega)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的開子集。

(3) 若 $f'(a):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是單射 (必 $m \le n$), 則 f 在 a 局部單。

注 3.2. 結論 (1) 正是反函數定理。結論 (2)、(3) 則是其推論; 它們以及更一般的秩定理, 都可以通過補充分量的方法轉化為相同維數的空間之間的映射, 然後應用反函數定理來證明. 這是應用反函數定理的典型手法。

注 3.3. 我們認為例 3.1 是體現微分學基本思想的最佳範例: 它很好地表現了 $f'(a)$ 如何, f 就大約如何這個思想。只有用向量值函數, 才能把它表達得如此簡練、清楚。如果按傳統的教法, 只討論數量值函數 (即 $n=1$ 的情形), 則情形 (1)、(3) 不可能出現, 而情形 (2) 也只在 $f'(a)\neq 0$ 這個平凡的情形出現, 因此就沒法通過這個最佳範例展現微分學的基本思想, 這無疑是一個巨大的損失。

局部滿射定理、局部單射定理以及更一般的秩定理, 對學生今後學習微分流形非常重要. 因此在數學分析課中應該不回避向量值函數、把這幾個並不困難的定理講清楚。這樣一來, 數學分析的教學才能進入廣闊的新天地。例如, 鄭州大學馬建國編著的教材 [6] 中用局部滿射定理

給出約束極值的 Lagrange 乘數法的一個有趣的幾何證明; 注 2.4 中提到的我們的工作 [19] 也是用局部滿射定理證明的。

下面我們來談談多元函數積分學。積分學用於實際問題的關鍵是微元法, 我們認為這就是積分學的基本思想。至於各種積分的性質和計算方法乃至它們之間的關係形成的整套理論體系, 當然也很重要, 但大家在教學中都對此給予了足夠的重視。所以我們下面著重談一下微元法。

由於在數學上的重要性, 我們認為微元法最重要的應用是定義 $\mathbb{R}^m$ 中 k -維曲面的面積。在我們的多元微積分教學體系中, 這是引入 $\mathbb{R}^m$ 中的曲面積分, 進而用我們的方法證明 m-重積分換元公式的前期準備。

例 3.4 (曲面的面積). 利用 Gram-Schmidt 正交化可以定義並證明 $\mathbb{R}^m$ 中以 a 為頂點, 以線性無關向量組 $v=\{v_i\}_{i=1}^k$ 為邊的平行 $2k$-面體 $P_a[v]=P_a[v_1,\ldots,v_k]$ 的體積

$$\mu(P_a[v])=\sqrt{\det(G^{\mathrm{T}}G)}, \tag{3.2}$$

其中 $G=(v_1,\ldots,v_k)$ 是以 v_i 為列向量的 $m\times k$ 矩陣. 設 $\mathbb{R}^m$ 中的 k 維曲面 S 有參數表示 $x:\bar{U}\to\mathbb{R}^m$, 其中 U 是 $\mathbb{R}^k$ 中有界的 Jordan 可測開集, x 是滿足 $\operatorname{rank}x'(u)\equiv k$ 的單射。則:

- x 將 U 中以 $\mathrm{d}u=\{\mathrm{d}u^i\varepsilon_i\}_{i=1}^k$ 為邊的無窮小 $2k$-面體 $P_{u_0}[\mathrm{d}u]$ 映成 S 上面積為 $\mathrm{d}\sigma$ 的曲面片。這裡 ε_i 是 $\mathbb{R}^k$ 中的標準基向量, $\mathrm{d}u^i$ 是 ε_i 方向的小增量。

- 模掉一個平移, $x'(u_0):\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ 則將 $P_{u_0}[\mathrm{d}u]$ 映成 S 在 $x_0=x(u_0)$ 的切空間 $T_{x_0}S$ 中的小 $2k$-面體 $P_{x_0}[v]$。這裡 $v=\{v_i\}_{i=1}^k$,
$$v_i=x'(u_0)(\mathrm{d}u^i\varepsilon_i)=\mathrm{d}u^i\cdot x'(u_0)\varepsilon_i.$$

我們用 $P_{x_0}[v]$ 的體積來近似 $\mathrm{d}\sigma$ (這是微元法的要點), 則得到面積微元

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma\approx\mu(P_{x_0}[v])&=\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^k\cdot\mu\left(P_{x_0}[x'(u_0)\varepsilon_1,\ldots,x'(u_0)\varepsilon_k]\right)\\&=\sqrt{\det\left[\left(x'(u_0)\right)^{\mathrm{T}}x'(u_0)\right]}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^k.\end{aligned}\tag{3.3}$$

這裡第二個等號我們用了 (3.2)。第一個等號用到由 (3.2) 容易推知的事實: 將平行 $2k$-面體的某邊伸縮為原來的 λ 倍, 則其體積變成原來的 λ 倍; 見例 4.1。

很自然, 當 u_0 跑遍 U 時, 我們把面積微元 $\mathrm{d}\sigma$ 累積起來, 就得到 $\mathbb{R}^m$ 中 k-維曲面 S 的面積

$$\mathcal{A}(S)=\int\mathrm{d}\sigma=\int_U\sqrt{\det\left[\left(x'(u)\right)^{\mathrm{T}}x'(u)\right]}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^k.$$

運用 k-重積分換元公式, 很容易證明上式右端的 k-重積分與曲面 S 的參數表示的選擇無關。因此這樣來定義 $\mathbb{R}^m$ 中 k-維曲面 S 的面積是合理的。

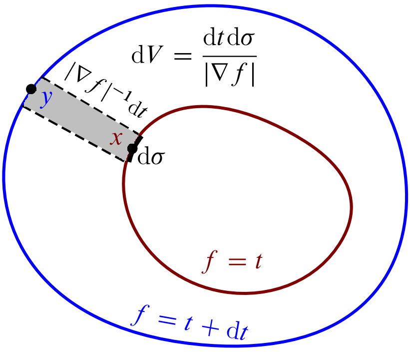
注 3.5. 傳統的數學分析一般只處理 $\mathbb{R}^3$ 中的二維曲面的面積, 於是也只能介紹二維曲面上三元函數的曲面積分, 進而對於在偏微分方程理論中非常重要的散度定理也只能討論三維的情形。這非常不利於學生今後學習更深入的現代數學知識, 不利於培養高素質的數學研究和應用人才。

以下介紹的餘面積公式通常並不是數學分析課的教學內容, 但是南京大學梅加強編著的教材 [7] 中對它做了簡單的介紹。鑒於這個公式非常有用, 我在課程中運用學生正在學的常微分方程 (在我校安排在二年級第 1 學期) 的知識證明了餘面積公式, 見例 4.11。這裡先用微元法形式上做些推導。

例 3.6 (餘面積公式). 設 $G \subset \mathbb{R}^m$ 是開區域, $f : G \to \mathbb{R}$。視 $\Omega = f^{-1}[a,b]$ 為 $\mathbb{R}^m$ 中的物體, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ 是密度函數。則 Ω 的質量

$$M = \int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}x.$$

任取 $t \in [a,b]$。在曲面 $f^{-1}(t)$ 上的點 x 取面元 $\mathrm{d}\sigma$。過 x 作法線交鄰近的曲面 $f^{-1}(t+\mathrm{d}t)$ 於 y。則



$$\mathrm{d}t = f(y) - f(x) \approx \nabla f(x) \cdot (y - x),$$

這裡用到 f 在 x 的 Taylor 展開並略去高階無窮小量。由於 $\nabla f(x)$ 和 $y - x$ 都是曲面 $f^{-1}(t)$ 在 x 處的法向量, 即它們是共線的, 在上式兩邊取模我們得到

$$|y - x| = \frac{\mathrm{d}t}{|\nabla f(x)|}.$$

我們用 x 處的密度 $g(x)$ 來近似代替以 $\mathrm{d}\sigma$ 為底, $|y-x|$ 為高的柱體中各點的密度。這柱體的體積 $\mathrm{d}V$ 和質量 $\mathrm{d}m$ 分別等於

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \mathrm{d}m = \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma.$$

將 $\mathrm{d}m$ 沿曲面 $f^{-1}(t)$ 積分, 就得到環狀區域 $f^{-1}[t, t+\mathrm{d}t]$ 的質量

$$\mathrm{d}M = \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}t \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}\sigma.$$

現在在 $[a,b]$ 上對 t 積分, 就得到 Ω 的總質量

$$\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}t \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}\sigma. \tag{3.4}$$

這就是餘面積公式。它其實就是化重積分為累次積分, 只不過裡層積分在一個曲面上進行。

注 3.7. 本例在兩個層次上運用微元法。先取 t 方向的微元 $\mathrm{d}t$, 然後在曲面 $f^{-1}(t)$ 上點 x 處取面積微元 $\mathrm{d}\sigma$, 得出小柱體 $\mathrm{d}V$ 的質量微元 $\mathrm{d}m$ 後對 $\mathrm{d}\sigma$ 積分得到環狀區域 $f^{-1}[t,t+\mathrm{d}t]$ 的質量 $\mathrm{d}M$, 再對 $\mathrm{d}t$ 積分得到整個區域 $f^{-1}[a,b]$ 的質量。因此, 這是微元法比較複雜的應用, 但是把它介紹給學生能很好地加強對微元法的理解, 從而提高運用積分解決實際問題的能力。

微元法的另一精彩應用是由 Gauss 公式推導 Archimedes 浮力定律。這是歐陽光中等編著的教材 [8] 中的一道例題, 也是陳紀修等編著的教材 [1] 中的一道習題. 因此我們這裡就略而不談了。

4 不同課程之間融會貫通

在我國大部分高校數學院系的課程設置方案中, 數學分析 3 (即多元微積分) 一般被安排在二年級第 1 學期。此時, 學生已經學完了線性代數。傳統的數學分析課運用了一些線性代數的知識, 主要限於用線性映射和矩陣表達非線性映射的導數 (見 (3.1))、用矩陣乘法表達複合函數求導的鏈鎖法則, 以及通過考察函數在臨界點處的 Hesse 矩陣的正定性來研究極值。另外, 在很多學校二年級第 1 學期的學生同時在學習常微分方程, 但是根據我們對國內外微積分或數學分析教學的瞭解, 我們沒有看到將常微分方程的知識應用於數學分析教學的做法。

我們在教學中發現線性代數可以對數學分析的教學發揮更大的作用。此外, 近年的教學中我們運用學生剛剛掌握的常微分方程知識來處理數學分析中的一些重要問題, 也取得了很好的效果。以下我們分別介紹這兩方面的典型例子。

4.1 線性代數

例 4.1 (初等矩陣的妙用). 在 (3.2) 中我們給出了 $\mathbb{R}^m$ 中的平行 $2k$-面體體積的計算公式。在應用中往往需要用到平行多面體的體積的性

質, 這些性質可以利用公式 (3.2) 結合初等矩陣來得到。例如, 討論 $\mathbb{R}^m$ 中 k-維曲面的面積時, 在 (3.3) 式我們需要以下等式

$$\mu(P_a[v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots,v_k]) = |\lambda|\,\mu(P_a[v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_k]).$$

設 E_λ 為 k-階單位矩陣的第 i 行乘以 λ 所得的初等矩陣, 並分別記以上式左右端中括弧中的向量為列向量的 $m\times k$ 矩陣為 $\tilde{G}$ 和 G, 則由初等矩陣的性質即知 $\tilde{G} = GE_\lambda$, 於是立刻就得到所需結論:

$$\sqrt{\det(\tilde{G}^{\mathrm{T}}\tilde{G})} = \sqrt{\det\left(E_\lambda^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}GE_\lambda\right)} = \sqrt{\lambda^2\det(G^{\mathrm{T}}G)} = |\lambda|\sqrt{\det(G^{\mathrm{T}}G)}.$$

例 4.2 (超曲面的法向量). 設 U 是 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中的開集, 我們來求 $\mathbb{R}^m$ 中以正則 C^1-映射 $x: U\to\mathbb{R}^m$ 為參數表示的曲面 S 在點 $x_0 = x(u_0)$ 的法向量 N。

對 $\forall h\in\mathbb{R}^{m-1}$, $\gamma: t\mapsto x(u_0+th)$ 是 S 上過 x_0 的曲線, 其切向量

$$\dot{\gamma}(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} x(u_0+th) = x'(u_0)h.$$

由於 N 與 $\dot{\gamma}(0)$ 正交, 我們有

$$0 = \dot{\gamma}(0)\cdot N = (x'(u_0)h)\cdot N = h^{\mathrm{T}}\left([x'(u_0)]^{\mathrm{T}}N\right).$$

由 h 的任意性可知 $[x'(u_0)]^{\mathrm{T}}N = 0$。法向量 N 至少有一個非零分量, 於是此式實際上是以剩餘 $m-1$ 個分量為未知量的非齊次線性方程組。由 x 正則即 $\operatorname{rank} x'(u_0) = m-1$ 可知此方程組的係數行列式非零, 於是由 Cramer 法則可求出法向量

$$N = \left(\frac{\partial(x^2,\ldots,x^m)}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})}, -\frac{\partial(x^2,\ldots,x^m)}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})},\ldots,(-1)^{m+1}\frac{\partial(x^1,\ldots,x^{m-1})}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})}\right).$$

注 4.3. 大部分數學分析教材只用三維空間中向量的叉乘討論 $m=3$ 的情形, 有些教材 (例如 [7]) 運用學生比較陌生的 $(m-1)$ 個 m-維向量的叉乘討論 m-維情形。例 4.2 用學生熟悉的線性代數來研究, 顯得更為自然。作為課後的練習還可以讓學生運用關於 k 個含 $m-1$ 個未知數的非齊次線性方程組的理論研究 $\mathbb{R}^m$ 中 k-維曲面的法向量問題。

定向是流形等一些數學對象的一個整體性質。我們常常說 Jacobi 行列式大於零的映射保持定向, 指的是: 設 $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^m$, $\det\varphi'(a)>0$, 若 $\{X_i\}_{i=1}^m$ 是 $T_a\mathbb{R}^m$ 的正基, 則 $\{\varphi_{*a}X_i\}_{i=1}^m$ 是 $T_{\varphi(a)}\mathbb{R}^m$ 的正基。以下的例 4.4 從另一個重要的角度討論 Jacobi 行列式的符號與定向的關係。

例 4.4 (Jacobi 行列式的符號與定向). 設 Ω 和 D 是 $\mathbb{R}^m$ 中的光滑閉區域, $\varphi : \Omega \to D$ 是微分同胚。設 U 是 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中的開集, $x : U \to \partial\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 在點 $a \in \partial\Omega$ 附近的局部參數表示, 熟知 $y = \varphi \circ x : U \to \partial D$ 是 ∂D 在 $b = \varphi(a)$ 附近的局部參數表示. 若 $\det \varphi'(a) > 0$, 並且

$$N = \left(\frac{\partial(x^2, \ldots, x^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})}, \ldots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(x^1, \ldots, x^{m-1})}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})}\right)$$

是 $\partial\Omega$ 在 a 點的外法向量, 則

$$\tilde{N} = \left(\frac{\partial(y^2, \ldots, y^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})}, \ldots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(y^1, \ldots, y^{m-1})}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})}\right)$$

是 ∂D 在 $b = \varphi(a)$ 點的外法向量。

注 4.5. 設 N 是 $\partial\Omega$ 在 $a \in \partial\Omega$ 的法向量。若有 $\varepsilon > 0$, 使得當 $t \in (-\varepsilon, 0)$ 時 $a + tN \in \Omega$, 就稱 N 是 $\partial\Omega$ 在 a 處的外法向量。例 4.4 的關鍵是證明 D 中的曲線 $\gamma : t \mapsto \varphi(a + tN)$ 在 $b = \varphi(a)$ 的切向量 v 與 $\tilde{N}$ 的夾角是銳角。為此我們運用了扁矩陣與瘦矩陣之積的行列式的 Cauchy-Binet 公式, 以及 $A^*A = (\det A)\,\mathrm{I}_m$ 等線性代數知識; 這裡 A^* 是 A 的伴隨矩陣, I_m 是 m-階單位陣；詳情可見 [18]。

例 4.6 (重積分換元公式). 設 D 和 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中 Jordan 可測的有界閉區域, $\varphi : \Omega \to D$ 是 C^1-微分同胚。若 $f \in C(D)$, 則我們有 m-重積分的換元公式

$$\int_D f(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega f(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| \mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

重積分換元公式的證明是數學分析教學中比較困難的問題。do Carmo 的名著 [15] 中有一道習題, 讓讀者用 Green 公式證明二重積分換元公式。受其啟發, 在 [20] 中我們把這道習題的思想推廣到高維, 用數學歸納法給出 m-重積分換元公式 (4.1) 的一個比較簡單的證明。

首先我們如下定義 $\mathbb{R}^m$ 中 $(m-1)$-維曲面 S 上的曲面積分

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma = \int_U f(x(u))\,|N(u)|\,\mathrm{d}u.$$

其中 $x : U \to \mathbb{R}^m$ 是曲面 S 的參數表示, N 是由此參數表示按例 4.2 給出的 S 的法向量場。由歸納假設, 即 $(m-1)$-重積分換元公式, 容易證明上式右端與 S 的參數表示的選擇無關。

然後, 利用化重積分為累次積分容易證明 m-維散度定理。最後利用散度定理證明 m -重積分換元公式, 這時我們需要用到 Cauchy-Binet 公式, 行列式按行展開等線性代數知識。

注 4.7. 與劃分積分區域並估計每個小塊變換後的體積, 進而研究 Riemann 和的傳統證明相比, 我們在 [20] 中給出的上述證明完全是巧妙的計算, 便於課堂講授, 學生也容易掌握。這個證明基於鏈法則和微積分基本定理 (即散度定理), 在思想上與一元情形 (即定積分) 是一脈相承的。因此, 有一定理由相信這是證明重積分換元公式最合理的辦法。

在證明的過程中, 我們順便建立了 (第一類) 曲面積分的理論, 包括 m-維的散度定理. 因此從需要的學時來看, 可能比其他方法會節省一些。利用曲面的參數表示將曲面積分定義為參數區域上的 $(m-1)$-維積分, 是近些年來很多數學分析教材 (例如 [2, 7, 8, 22]) 採用的做法。當然, 這些教材需要先證明重積分換元公式, 以保證曲面積分的定義與曲面的參數表示的選擇無關。

注 4.8. 在我們的證明中, 當 Ω 是球體時, 我們只要求換元映射 φ 將 $\partial\Omega$ 微分同胚地映成 ∂D, 也就是說 $\varphi : \Omega \to D$ 可以既不單也不滿。於是, 用 [13] 中的想法立刻就得到 m-維 Brouwer 不動點定理。據我們所知, 國內外出版的數學分析教材中幾乎都沒能探討高維的 Brouwer 不動點定理, 除非先花大量篇幅介紹微分流形、微分形式以及流形上的積分和 Stokes 公式 (見 Zorich [24])。張築生教授的教材 [11] 用 Green 公式證明了二維的 Brouwer 不動點定理。關於 Brouwer 不動點定理的其他初等證明 (即只用微積分), 可見 [16, 21]。

4.2 常微分方程

設 $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in S = g^{-1}(0)$ 有 $\nabla g(x) \neq 0$。則 S 是 $\mathbb{R}^m$ 中的光滑曲面。設 $p \in S$。眾所周知, $\nabla g(p)$ 與 S 上任一經過 p 點的曲線 γ 的切向量 $\dot{\gamma}(0)$ 都正交, 因此 $\nabla g(p)$ 是 S 在 p 點的法向量。

一個自然的問題是: 設 $h \in \mathbb{R}^m$, $\nabla g(p) \cdot h = 0$, S 上是否有經過 p 點的曲線以 h 為切向量? 這個問題與約束極值的 Lagrange 乘數法有關。對此, 我們有如下結果.

例 4.9. 設 $g \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $p \in S = g^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} g'(p) = n$。若 $g'(p)h = 0$, 則有 C^1-映射 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ 使 $\gamma(0) = p$ 且 $\dot{\gamma}(0) = h$。

利用這個結論, 可以研究 $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ 在約束條件 $g(x) = 0$ 下的約束極值問題, 證明 Lagrange 乘數法。一些數學分析教材運用隱函數定理給出例 4.9 的證明, 這是隱函數定理的漂亮應用, 我們的課上當然也會講。但是, 我們還運用常微分方程的方法給出如下證明。

證. 因 $\operatorname{rank} g'(p)=n$, 可取 $\delta>0$ 使 $\{\nabla g^i\}_{i=1}^n$ 在 $B_\delta(p)$ 線性無關。對 $q\in B_\delta(p)$, 令 $Y(q)$ 是 h 在 T_qS 的投影, 則得 C^1-映射 $Y:B_\delta(p)\to\mathbb{R}^m$。由常微分方程解的存在唯一性定理可知初值問題

$$\dot\gamma(t)=Y(\gamma(t)),\qquad \gamma(0)=p \tag{4.2}$$

有解 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$, 顯然 $\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=Y(p)=h$。

用 Gram-Schmidt 正交化將向量場 Y 用 ∇g^i 線性表示, 並利用 (4.2) 以及 $g'(p)h=0$ 容易驗證 $(g\circ\gamma)'(t)=0$. 故 $g(\gamma(t))=g(p)=0$, 即 $\gamma(-\varepsilon,\varepsilon)\subset S$。

注 4.10. 我們要求 $g\in C^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ 是為了對 (4.2) 應用常微分方程解的存在唯一性定理。如果用隱函數定理來證明的話, 只需要求 $g\in C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$。上述證明是受 [23, Ch3] 啟發做出的, 那裡考慮的是 $n=1$ 的情形, 此時

$$Y(q)=h-\frac{h\cdot\nabla g(q)}{|\nabla g(q)|^2}\nabla g(q).$$

在例 3.6 中我們曾用微元法導出餘面積公式。作為常微分方程對數學分析的應用的另一個例子, 我們現在來證明餘面積公式。

例 4.11 (餘面積公式). 設 $G\subset\mathbb{R}^m$ 為有界開集, $f\in C^2(G)$, $\Omega=f^{-1}[a,b]$. 對任意 $x\in\Omega$ 有 $\nabla f(x)\neq 0$。若 $g\in C(\Omega)$, 則

$$\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}t\int_{f=t}\frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}\sigma.$$

證. 為簡單起見我們只考慮 $f^{-1}(a)$ 有統一的參數表示的情形, 設 $\varphi:U\to\mathbb{R}^m$ 是其參數表示。利用常微分方程初值問題

$$\dot x=\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2},\qquad x(a)=p\in f^{-1}(a) \tag{4.3}$$

的解 $x=x(t,p)$ 可構造微分同胚 $T:U\times[a,b]\to\Omega$, $(u,t)\mapsto x(t,\varphi(u))$。利用行列式按列展開、共線向量內積的絕對值等於它們的模之積以及 (4.3), 容易算出

$$\left|\det T'(u,t)\right|=\frac{|N_t(T(u,t))|}{|\nabla f(T(u,t))|}.$$

這裡 N_t 是曲面 $f^{-1}(t)$ 的參數表示 $u\mapsto T(u,t)$ 按照例 4.2 的方式確定的法向量。於是由重積分換元公式和化重積分為累次積分即得

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x&=\int_{U\times(a,b)}g(T(u,t))\left|\det T'(u,t)\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\mathrm{d}t\int_U g(T(u,t))\frac{|N_t(T(u,t))|}{|\nabla f(T(u,t))|}\mathrm{d}u=\int_a^b\mathrm{d}t\int_{f=t}\frac{g}{|\nabla f|}\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

注 4.12. 上述餘面積公式的證明與我的研究領域臨界點理論 [10] 中的形變引理有密切關係. 這個證明也可以看作伍洪熙等教授的書 [9] 第 11 章講述的 Riemann 流形上的餘面積公式在歐氏空間情形的初等版本。然而 [9] 中的證明需要很多微分流形和 Riemann 幾何方面的預備知識, 所以我需要把這些高級的概念解包, 整理成上述的初等證明, 其中的一個關鍵之處是上述證明中提及的對 $\det T'(u,t)$ 的巧妙計算。我們給出的這個改編的證明把常微分方程、線性代數完美地結合起來, 很值得玩味, 應該會使學生受到很大的啟發。

注 4.13. 我在 2018 年秋季講完餘面積公式後, 很驚喜地發現有學生運用這個公式給出如下關於等值面的 Catalan 公式的極簡證明: 設 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 對 $\forall v \in \mathbb{R}$, 等值面 $f^{-1}(v)$ 都是封閉曲面, 設其所圍立體的體積為 $F(v)$, 並且 $F \in C^1[a,b]$。則

$$\int_{f^{-1}[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b vF'(v)\mathrm{d}v.$$

當 $n \leq 3$ 時, Catalan 公式是林源渠、方企勤的習題集 [3] 中的題目。由於相應教材中沒講餘面積公式, 學生用余面積公式給出的證明當然不是 [3] 的作者期望的證明。

我們在數學分析課中系統地運用常微分方程的知識, 應該說是一個大膽的嘗試, 在全世界可能都沒有先例。在我國大部分高校, 常微分方程與數學分析 3 都在二年級第 1 學期開設, 因此, 在數學分析 3 中運用常微分方程的知識是完全可行的。我們認為這樣做有助于培養學生對數學的整體觀念和融會貫通地運用不同課程的知識來解決問題的能力。

5 結束語

數學類本科生在一年級主要學習一元微積分和線性代數。這兩門課分別關注一維和高維, 不太可能有實質性的交叉融合; 因此一年級應該是打基礎的階段。但是正如我們已經看到的, 在二年級第 1 學期, 線性代數和常微分方程可以很自然地進入數學分析的教學, 得到豐富多彩的結果。現在看來多元微積分應該是學生接觸的第一門綜合性的課程。這樣的交叉融合, 也有利於學生更好地理解線性代數和常微分方程。

本文中我們多次強調, 數學分析中應該重視向量值函數。在注 3.3 中我們清楚地表明: 對向量值函數避而不談或講得不夠, 就很難向學生充分展現微分學的基本思想. 如果不熟悉向量值函數, 學生也將錯過數

學分析中很多精彩的內容。在二年級第 1 學期, 學生已經學完高等代數, 不應該對處理向量和向量值函數有實質性的困難。也許是因為現有的大部分數學分析教材都回避向量值函數 (或把它作為選學內容) 的原因, 有些教師擔心學生接受不了; 這種保守的觀念應該改變。

本文談到的這些體會和看法, 雖然是這幾年為廈門大學入選拔尖學生培養試驗計畫的優秀學生講授多元微積分的過程中對這門課進行思考和探索而產生的, 但是我認為這些想法和做法也完全適合其他的學生 (包括非重點院校的數學類本科生)。其理由是: 在二年級第 1 學期, 各類學生在知識儲備上幾乎沒有差別。今後, 我希望能有機會把我對本門課程的教學經驗應用到更廣泛的學生群體, 為數學教育事業做出應有的貢獻。

參考文獻

[1] 陳紀修, 於崇華, 金路。數學分析 (下冊)。北京: 高等教育出版社。2014。

[2] 郇中丹, 劉永平, 王昆揚。簡明數學分析。北京: 高等教育出版社。2009。

[3] 林源渠, 方企勤。數學分析習題集。北京: 高等教育出版社。1986。

[4] 劉軾波。多元函數的數學分析。https://pan.xmu.edu.cn/s/C4eaEZwRXc

[5] 劉軾波, 歐氏空間的滿射, 重積分換元公式和 Brouwer 不動點定理. https://pan.xmu.edu.cn/s/LaiWVZ3JTMc

[6] 馬建國。數學分析 (下冊)。北京: 科學出版社。2011。

[7] 梅加強。數學分析。北京: 高等教育出版社。2011。

[8] 歐陽光中, 姚允龍, 周淵。數學分析 (下冊)。上海: 復旦大學出版社。2012。

[9] 伍洪熙, 沈純理, 虞言林。黎曼幾何初步。北京: 北京大學出版社。1989。

[10] 張恭慶。臨界點理論及其應用。上海: 上海科技出版社。1986。

[11] 張築生。數學分析新講 (第三冊)。北京: 北京大學出版社。1991。

[12] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Functional Analysis, 14, 349–381, 1973.

[13] L. Báez-Duarte, Brouwer's fixed-point theorem and a generalization of the formula for change of variables in multiple integrals, J. Math. Anal. Appl., 177, 412–414, 1993.

[14] K.-C. Chang, Methods in nonlinear analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[15] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1976.

[16] Y. Kannai, An elementary proof of the no-retraction theorem, Amer. Math. Monthly, 88, 264–268, 1981.

[17] G. Katriel, Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 11, 189–209, 1994.

[18] S. Liu, On the sign of Jacobian and orientation of parametrized surfaces, preprint.
https://pan.xmu.edu.cn/s/Qckz2Ty4RFQ

[19] P. Liu, S. Liu, On the surjectivity of smooth maps into Euclidean spaces and the fundamental theorem of algebra, Amer. Math. Monthly, 125, 941–943, 2018.

[20] S. Liu, Y. Zhang, On the change of variables formula for multiple integrals, J. Math. Study, 50, 268–276, 2017.

[21] J. Milnor, Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed-point theorem, Amer. Math. Monthly, 85, 521–524, 1978.

[22] J. Shurman, Calculus and analysis in Euclidean space. Cham: Springer, 2016.

[23] J. A. Thorpe, Elementary topics in differential geometry. New York: Springer-Verlag, 1994.

[24] V. A. Zorich, Mathematical analysis. II. Heidelberg: Springer, 2016.