欧氏空间之间的满射，重积分换元公式和 Brouwer 不动点定理*

刘轼波

佛罗里达理工学院
Florida Institute of Technology

http://www.liusb.com
sliu@fit.edu

*December 11, 2022

目录

关于超链接的说明

这个幻灯片里头有一些超链接:

- ✳ 第 9 页注 5, 蓝色的 Lagrange 乘数法;
- ✳ 第 11 页第 3 节开头处的红色星号, 点击它会跳到第 32 页, 延续到第 33、34 页;
- ✳ 第 15 页第 1 行蓝色的 Cauchy-Binet 公式;
- ✳ 第 21 页定理 10 前面那行蓝色的余面积公式.

点击上面这些超链接, 会跳转到相关的页面; 阅毕点击页面底部蓝条上的 Florida Tech 字样, 会返回刚才跳出的地方以便继续阅读.

幻灯片中大部分蓝色的字也都是超链接, 点击跳转后, 均可以通过点击页面底部蓝条上的 Florida Tech 返回刚才的地方.

1. 向量值函数微分学

向量 $x \in \mathbb{R}^m$ 的欧氏模

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2}.$$

设 $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $a \in U^\circ$. 若有 $n \times m$ 矩阵 A 使 $|h| \to 0$ 时

$$f(a+h) - f(a) - Ah = o(|h|),$$

则称 A 是 f 在 a 的导数, 记为 $A = f'(a)$ 或 $A = Df(a)$.
设 $f = \left(f^1, \ldots, f^n\right)$, A 的第 i 行为 A^i, 上式的第 i 分量

$$f^i(a+h) - f^i(a) - A^i h = o(|h|).$$

于是 f^i 在 a 可微, 且

$$A^i = \nabla f^i(a) = \left(\partial_1 f^i, \ldots, \partial_m f^i\right).$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \cdots & \partial_m f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \cdots & \partial_m f^n \end{pmatrix}. \qquad f \text{ 在 } a \text{ 的 Jacobi 矩阵}$$

当 $m=n$ 时, A 是方阵, 其行列式记为

$$\frac{\partial(f^1,\dots,f^m)}{\partial(x^1,\dots,x^m)} = \det\begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \cdots & \partial_m f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^n & \cdots & \partial_m f^n \end{pmatrix}. \qquad \text{(Jacobi 行列式)}$$

设 $U\subset\mathbb{R}^m$, $V\subset\mathbb{R}^n$. $f:U\to\mathbb{R}^n$, $g:V\to\mathbb{R}^\ell$, $f(U)\subset V$. 则有复合

$$g\circ f: U\to\mathbb{R}^\ell.$$

定理1 (链法则). 设 f 在 $a\in U$ 可微, g 在 $b=f(a)$ 可微, 则 $g\circ f$ 在 a 可微且 $(g\circ f)'(a)=g'(b)f'(a)$.

若 $y=g(u)$, $u=f(x)$, 则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^\ell}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^\ell}{\partial x^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial u^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^\ell}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial y^\ell}{\partial u^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}.$$

定理2 (反函数定理). 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 是 C^1- 映射, $a\in\Omega$. 若 $\det f'(a)\neq 0$, 则有 a 的开邻域 $U\subset\Omega$ 以及 $b=f(a)$ 的开邻域 V, 使得 $f:U\to V$ 是微分同胚. (体现微分学基本思想的典范)

注1. $\det f'(a)\neq 0$ 即 $f'(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是线性同构; 则 f 局部可逆.

推论1 (局部满射定理). 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1- 映射, $a\in\Omega$. 若 $\operatorname{rank} f'(a)=n$, 则 $b=f(a)$ 是 $f(\Omega)$ 的内点.

注2. $\operatorname{rank} f'(a)=n$ 即 $f'(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是线性满射; 则 f 局部满.

证(推论1). .

$$f'(a)=\begin{pmatrix}\partial_1 f^1 & \cdots & \partial_m f^1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f^n & \cdots & \partial_m f^n\end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix}\partial_1 f^1 & \cdots & \partial_n f^1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f^n & \cdots & \partial_n f^n\end{pmatrix}\neq 0.$$

作 $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $F(x)=(f^1(x),\dots,f^n(x),x^{n+1},\dots,x^m)$. 则

$$F'(a)=\begin{pmatrix}\left(\partial_i f^j\right)_{i,j=1,\dots,n} & \left(\partial_i f^j\right)_{i>n}\\ 0 & I_{m-n}\end{pmatrix}$$

可逆. 于是可以对 F 应用反函数定理.

2. 欧氏空间的满射和代数基本定理

定理3 (代数基本定理). 设 $a_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$,
$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$
是一多项式, 则 $\exists \xi \in \mathbb{C}$ 使 $p(\xi) = 0$.

- Gauss 在 200 多年前就给出了证明. 但进入 21 世纪后, 还不断有新的证明发表 Sen[00], LL[10].
- 常见证明以复分析或代数拓扑为工具, FR[97] 有详尽的介绍.
- 欧阳光中 OY[03] 运用 Green 公式证明 (用到多值函数 Arg 但可避免).
- LL[10] 使用 Fourier 逆变换公式证明 FTA.
- Sen[00] 主要运用反函数定理. 但其证明 涉及复平面的拓扑子空间中的开集、闭集, 以及连通性 等点集拓扑概念.

注3. 为使二年级本科生能理解, 我们想避免点集拓扑的知识, 给出纯数学分析的证明.

设 $z=x+\mathrm{i}y$, $p(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 视 p 为映射 $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$p(x,y)=(u(x,y),v(x,y)).$$

利用 Cauchy-Riemann 方程易知

$$p'(z)=0 \iff \det Dp(x,y)=0, \quad (x,y) \text{ 为 } p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \text{ 的临界点}$$

因 $p'(z)$ 是 $(n-1)$- 次多项式, 故映射 $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 只有有限个临界点. 显然

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty}|p(x,y)|=+\infty,$$

这使我们回忆起经典结果 (一些数学分析书的习题, 如 Mei[11], P343)

命题1 (Dei[85], Page 24). 设 C^1- 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\lim_{|x|\to\infty}|f(x)|=+\infty, \tag{1}$$

并且对 $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 有 $\det Df(x)\neq 0$, 则 $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

注4. (1) 如果能把 $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 有 $\det Df(x)\neq 0$ 减弱为只有有限个 x 使 $\det Df(x)=0$, 则立刻可得代数基本定理.

(2) (1) 意味着 $f(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集. 这启发我们猜出 定理5.

定义1. 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1- 映射, $a\in\mathbb{R}^m$. 若 $Df(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 不是满射, 则称 a 为 f 的临界点.

定理4 (局部满射定理). 设 $U\subset\mathbb{R}^m$, $f:U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1- 映射, $a\in U^\circ$. 若 $Df(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是满射, 则 $f(a)$ 是 $f(U)$ 的内点.

注5. 马建国 Ma[11] 用它证明约束极值的 Lagrange 乘数法.

定理5 (LL[18]). 设 C^1- 映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 只有有限个临界点, $n\geq 2$, 并且 $f(\mathbb{R}^m)$是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, 则 $f(\mathbb{R}^m)=\mathbb{R}^n$. (值域闭是必要条件)

证. 记 K 为 f 的临界点集, 它有限, 从而 $f(K)$ 也有限.

- $\mathbb{R}^m\backslash K$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集. $\forall x\in\mathbb{R}^m\backslash K$, $Df(x):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 满.

  由 定理4, $f(x)$ 是 $A=f(\mathbb{R}^m\backslash K)$ 的内点. 故 A是 $\mathbb{R}^n$ 的 开子集.

- 但依假设,

$$A\cup f(K)=f(\mathbb{R}^m\backslash K)\cup f(K)=f(\mathbb{R}^m)\qquad\text{是闭集.}$$

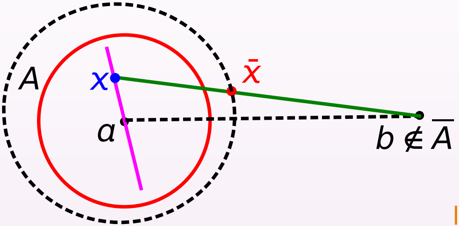
- 注意 $f(\mathbb{R}^m)=\overline{f(\mathbb{R}^m)}\supset\overline{A}$, 问题归结为直观上很显然的结果: 若开集 A 添有限个点后闭, 则 $\overline{A}=\mathbb{R}^n$.

引理1. 设 $n \geq 2$, A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开子集. 若有 $p_1, \ldots, p_k$使 $A \cup \{p_i\}_{i=1}^k$ 为闭集, 则 $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

证. 因 A 开, $A \cap \partial A = \varnothing$.

$$A \cup \{p_i\} = \overline{A \cup \{p_i\}}$$
$$= A \cup \partial A \cup \{p_i\}$$
$$\Longrightarrow \partial A \subset \{p_i\},$$

即 ∂A 为有限集.

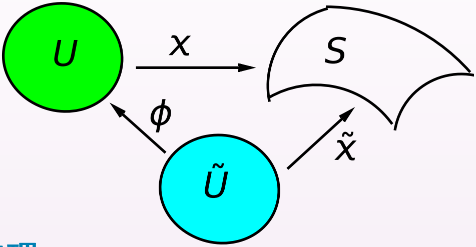


推论2. 设 M 是 m- 维无边光滑流形, C^1- 映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 只有有限个临界点, $n \geq 2$. 若 $f(M)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, 则 $f(M) = \mathbb{R}^n$.

推论3. 设 $n \geq 2$, M 是 m- 维无边光滑紧流形, $f: M \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1- 映射, 则 f 有无穷多个临界点.

3. 重积分换元公式

✱ 受 dC[76] (用 Green 公式证明二重积分换元公式) 启发，我们假设 $(m-1)$ 重积分换元公式成立，则 可定义 $\mathbb{R}^m$ 中 $(m-1)$ 维曲面积分，建立散度定理，再用散度定理证 m- 重积分换元公式.



3.1. 曲面积分和散度定理

✳ 设 U 为 $\mathbb{R}^{m-1}$ 中 Jordan 可测闭区域，C^1- 映射 $x : U \to \mathbb{R}^m$ 在 U° 为单射 且满足 $\mathrm{rank}\left(\partial x^i/\partial u^j\right) = m-1$，则称 x 为 C^1- 参数曲面.

✳ 称 x与 $\tilde{x} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ 等价，若有微分同胚 $\phi : \tilde{U} \to U$ 使 $\tilde{x} = x \circ \phi$.

此时 $\tilde{x}(\tilde{U}) = x(U)$，因此可把 x 的等价类 $[x]$ 与 $x(U)$ 等同，称为光滑曲面，记为 $S = x(U)$，或 $S = [x : U \to \mathbb{R}^m]$.

熟知 $S=[x:U\to\mathbb{R}^m]$ 在点 $x(u)$ 处的法矢为 (Cramer 法则)

$$N(u)=\left(\frac{\partial(x^2,\dots,x^m)}{\partial(u^1,\dots,u^{m-1})},\dots,(-1)^{m+1}\frac{\partial(x^1,\dots,x^{m-1})}{\partial(u^1,\dots,u^{m-1})}\right).$$

设 $f:S\to\mathbb{R}$ 连续, 定义 f 在 S 上的曲面积分为

$$\int_S f(x)\mathrm{d}\sigma=\int_U f(x(u))\,|N(u)|\,\mathrm{d}u. \tag{2}$$

由 $(m-1)$- 重积分换元公式易证 右端与 S 的参数表示的选择无关.✱

对分片光滑曲面 $\Sigma=\bigcup_{i=1}^{\ell}S_i$, 其中 $S_i=x_i(U_i)$ 互不内交, 定义

$$\int_\Sigma f\mathrm{d}\sigma=\sum_{i=1}^{\ell}\int_{S_i}f\mathrm{d}\sigma. \qquad x_i(U_i^\circ)\cap x_j(U_j^\circ)=\varnothing.$$

定理6 (散度定理). 设 $D\subset\mathbb{R}^m$ 为有界闭区域, ∂D 分片光滑可定向, $F\in C^1(D,\mathbb{R}^m)$, n 是 ∂D 的幺外法矢场, 则

$$\int_D \mathrm{div}\,F\,\mathrm{d}x=\int_{\partial D}F\cdot n\,\mathrm{d}\sigma.$$

3.2. 单一区域

设 Ω 为有界开区域, 且有 $(m-1)$- 维 C^1- 参数曲面 $x : U \to \mathbb{R}^m$ 使 $\partial\Omega = x(U)$, 则称 Ω 为单一区域(注意 U 闭, x 只需在 U° 单).

例1. $\mathbb{R}^m$ 中的球 B 是单一区域. 例如 $m = 3$ 的情形, 可取

$$x : [0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3, \quad (\varphi,\theta)\mapsto(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

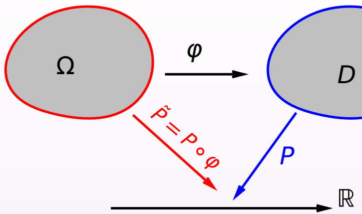
定理7 (LZ[17]). 设 D 和 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中有 C^1- 边界的有界开区域, Ω 单一, C^2- 映射 $\varphi : \bar{\Omega} \to \bar{D}$ 将 $\partial\Omega$ 微分同胚地映成 ∂D, $f \in C(\bar{D})$, 则

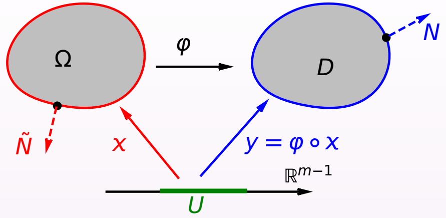
$$\int_D f(y)\mathrm{d}y = \pm\int_\Omega f(\varphi(x))J_\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{where } J_\varphi(x) = \det\varphi'(x).$$

注6. (1) 用磨光技巧Cui[13], 可设 f 是 $\mathbb{R}^m$ 上光滑函数在 $\bar{D}$ 上的限制.
(2) φ 只须在边界上好, 于是能得到 Brouwer 不动点定理 (定理9).
(3) P. Lax 等曾撰文讨论换元公式, 见 Lax[99], Lax[01], Tay[02], Iva[05].

其结果: $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$
φ在一大球外为恒等

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} f(\varphi(x))\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x.$$





证. 设 $\varphi: y^i = y^i(x^1, \ldots, x^m)$. 取 P 使 $\partial P/\partial y^1 = f$, 记 $\tilde{P} = P \circ \varphi$.
设 $x: U \to \mathbb{R}^m$ 是 $\partial\Omega$ 的参数化, 则 $y = \varphi \circ x$是 ∂D 的参数化,

$$N = \left(\frac{\partial(y^2, \ldots, y^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})}, \ldots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(y^1, \ldots, y^{m-1})}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})} \right)$$

是 ∂D 上的法矢, $n = \pm N/|N| = (n^1, \ldots, n^m)$ 是幺外法矢.

令 $\quad A = (A_1, \ldots, A_m), \qquad \tilde{N} = (\tilde{N}^1, \ldots, \tilde{N}^m)$, 其中

$$A_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(y^2, \ldots, y^m)}{\partial(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^m)}, \quad \tilde{N}^i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(x^1, \ldots, \hat{x}^i, \ldots, x^m)}{\partial(u^1, \ldots, u^{m-1})}.$$

则 $\tilde{n} = \pm \tilde{N}/\left|\tilde{N}\right|$ 是 $\partial\Omega$ 上的幺外法矢.

由 Cauchy-Binet 公式,

$$\pm n^1|N| = \frac{\partial(y^2,\ldots,y^m)}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^2,\ldots,y^m)}{\partial(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots x^m)} \frac{\partial(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots x^m)}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})} = A\cdot\tilde{N},$$

由散度定理, $P\circ y = P\circ(\varphi\circ x) = (P\circ\varphi)\circ x = \tilde{P}\circ x$

$$\int_D f(y)\mathrm{d}y = \int_D \frac{\partial P}{\partial y^1}\mathrm{d}y = \int_{\partial D} Pn^1\mathrm{d}\sigma$$

$$= \pm\int_U P(y(u))n^1(u)\,|N(u)|\,\mathrm{d}u \qquad \tilde{N} = \pm|\tilde{N}|\tilde{n}$$

$$= \pm\int_U \tilde{P}(x(u))(A\cdot\tilde{N})\mathrm{d}u = \pm\int_U (\tilde{P}A\cdot\tilde{n})|\tilde{N}|\mathrm{d}u$$

$$= \pm\int_{\partial\Omega} \tilde{P}A\cdot\tilde{n}\mathrm{d}\sigma = \pm\int_\Omega \mathrm{div}(\tilde{P}A)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

现计算 $\operatorname{div}(\tilde{P}A)$. 记 $y_i^k = \partial y^k/\partial x^i$, 则 A_i 是

$$\frac{\partial(y^1,\ldots,y^m)}{\partial(x^1,\ldots,x^m)} = \det\begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \cdots & y_i^1 & \cdots & y_m^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_i^2 & \cdots & y_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^m & y_2^m & \cdots & y_i^m & \cdots & y_m^m \end{pmatrix}$$

中 y_i^1 的代数余子式 (于是由 Hadamard 恒等式有 $\operatorname{div} A = 0$), 于是

$$\sum_{i=1}^m y_i^j A_i = \delta_1^j \frac{\partial(y^1,\ldots,y^m)}{\partial(x^1,\ldots,x^m)} = \delta_1^j J_\varphi(x), \qquad \tilde{P}(x) = P(\varphi(x))$$

$$\operatorname{div}(\tilde{P}A) = \nabla\tilde{P}\cdot A + \tilde{P}\operatorname{div} A = \nabla\tilde{P}\cdot A = f(\varphi(x))J_\varphi(x).$$

$$= \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial P}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)A_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial P}{\partial y^j}\left(\sum_{i=1}^m y_i^j A_i\right) = (\partial_{y^1}P)J_\varphi(x)$$

由 (3) 得 $$\int_D f(y)\mathrm{d}y = \pm\int_\Omega f(\varphi(x))J_\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

推论4. 在 定理7 的条件下, 若 J_φ 在 $\bar{\Omega}$ 上不变号, 则

$$\int_D f(y)\mathrm{d}y = \int_\Omega f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|\mathrm{d}x.$$

3.3. 一般区域

定理8. 设 D 和 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中 Jordan 可测的有界开区域, $f\in C(\bar{D})$, $\varphi\in C^1(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)$, $\varphi:\Omega\to D$ 是微分同胚, 则

$$\int_D f(y)\mathrm{d}y=\int_\Omega f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|\mathrm{d}x. \qquad f_\pm=\frac{1}{2}(|f|\pm f)$$

证. $f=f_+-f_-$, $f_\pm\in C(\bar{D})$, 可设 $f\geq 0$. 记 $\tilde{f}(x)=f(\varphi(x))\left|J_\varphi(x)\right|$.

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取不交球 $B_i\subset\Omega$ 使 (Mei[11], 引理13.4.2, (覆盖引理))

$$\int_\Omega\tilde{f}(x)\mathrm{d}x-\varepsilon\leq\sum_i\int_{B_i}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\sum_i\int_{\varphi(B_i)}f(y)\mathrm{d}y\leq\int_D f(y)\mathrm{d}y.$$

(2) 令 $\varepsilon\to 0$ 得 $\int_\Omega\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\leq\int_D f(y)\mathrm{d}y$.

(3) 同理可证 $\int_D f(y)\mathrm{d}y\leq\int_\Omega\tilde{f}(x)\mathrm{d}x$.

4. Brouwer 不动点定理

定理9 (Brouwer). 设 B 是 $\mathbb{R}^m$ 中的单位闭球, $g : B \to B$ 是连续映射. 则 g 有不动点.

众所周知, 为证 定理9 只需证明

命题2. 不存在 $\varphi \in C^2(B, \mathbb{R}^m)$ 使 $\varphi(B) \subset \partial B$ 且 $\varphi|_{\partial B} = 1_{\partial B}$.

证(思想来自 BD[93]). 取

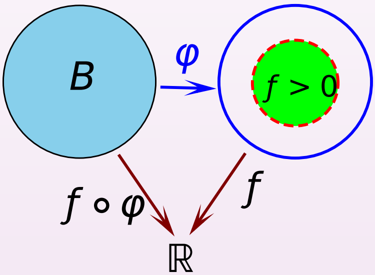
$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{1 - 4\,|y|^2}, & |y| \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < |y| \le 1. \end{cases}$$

则 $x \in B$ 时 $f(\varphi(x)) = 0$.

视 $\varphi : x \mapsto y$ 为换元映射, 由 定理7

$$0 < \int_B f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \pm \int_B f(\varphi(x)) \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \mathrm{d}x = 0, \text{ 矛盾.}$$



注7. ✳ 很多人是在学习代数拓扑的同调群时, 首次看到 Brouwer 不动点定理的证明.

✳ 很多微分流形的书中, 都作为流形上的 Stokes 公式的应用给出过 Brouwer 不动点定理的证明.

✳ Mil[78], Kan[81] 给出过 Brouwer 不动点定理的初等证明.

注8. 对于重积分换元公式, 我们的证明的优越性如下:

(1) 完全是巧妙的计算 (Cauchy-Binet), 更易于理解, 便于课堂讲授.

(2) 证明过程中同时也建立了 曲面积分 的理论 (包括散度定理).

(3) 由我们的证明立得 Brouwer 不动点定理.

例2 (Brouwer 不动点定理的应用). 设 A 可逆, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|}=0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_i^j x^j = f^i(x^1,\dots,x^n)$$

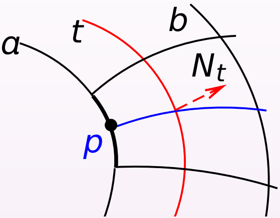
$$-\Delta u=\lambda u+f(u),\quad u|_{\partial\Omega}=0.$$

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{f(t)}{t}=0.$$

则非线性代数方程组 $Ax=f(x)$ 有解 ($Ax=b$, Cramer 法则的推广).

5. 余面积公式及应用

受 Mei[11] 影响, 我近年教学中介绍了 余面积公式.



定理10. 设 $G \subset \mathbb{R}^m$ 为有界开集, $f \in C^2(G)$, $\forall x \in G$ 有 $\nabla f(x) \neq 0$. $\Omega = f^{-1}[a,b] \subset G$.

若 $g \in C(\Omega)$, 则 $\displaystyle\int_\Omega g = \int_a^b \mathrm{d}t \int_{f^{-1}(t)} \frac{g}{|\nabla f|} \mathrm{d}\sigma.$

证(想法源自 WSY[89], §11). 对 $p \in f^{-1}(a)$, 设 $x(\cdot, p)$ 是初值问题

$$x' = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad x(a) = p \tag{4}$$

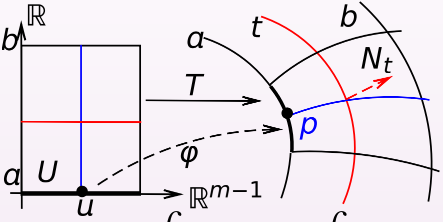
的解, 则 $x(b,p) \in f^{-1}(b)$. (在数分中用常微是我们的创举)

设 $f^{-1}(a)$ 的参数化 $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, 则在内部 $T : U \times$

$[a,b] \to \mathbb{R}^m$,

$$T(u,t) = x(t-a, \varphi(u))$$

是 C^1- 单射, $T(\cdot,t): U \to \mathbb{R}^m$ 是 $f^{-1}(t)$ 的参数表示,
法矢为 $N_t(u)$.



展开 $\det T'(u,t)$, 运用 (4), 得

$$\left|\det T'(u,t)\right| = \frac{|N_t(u)|}{|\nabla f(T(u,t))|} \neq 0.$$

故 T 在 $U^\circ \times (a,b)$ 是微分同胚. 由积分换元和 Fubini

$$\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x = \int_{T(U\times(a,b))} g(x)\mathrm{d}x \qquad x = T(u,t)$$

$$= \int_{U\times(a,b)} g(T(u,t)) \left|\det T'(u,t)\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}t \int_U \frac{g(T(u,t))}{|\nabla f(T(u,t))|} |N_t(u)|\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}t \int_{f^{-1}(t)} \frac{g}{|\nabla f|} \mathrm{d}\sigma.$$

例3 ($m = 2$ 见 LF[89]). 设 B 是 $\mathbb{R}^m$ 中单位球, $f \in C^1(B)$, $f|_{\partial B} = 0$. 求

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B \setminus B_\varepsilon} \frac{x \cdot \nabla f(x)}{|x|^m} \mathrm{d}x, \qquad \text{where } B_\varepsilon : |x| \le \varepsilon.$$

解. 由曲面积分的定义 (2), $\int_{|x|=t} g(x)\,\mathrm{d}\sigma = t^{m-1} \int_{|y|=1} g(ty)\,\mathrm{d}\sigma.$

$$\int_{B \setminus B_\varepsilon} \frac{x \cdot \nabla f(x)}{|x|^m} \mathrm{d}x = \int_\varepsilon^1 \mathrm{d}t \int_{|x|=t} \frac{x \cdot \nabla f(x)}{|x|^m} \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_\varepsilon^1 \left(t^{m-1} \int_{|y|=1} \frac{(ty) \cdot \nabla f(ty)}{|ty|^m} \mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_\varepsilon^1 \mathrm{d}t \int_{|y|=1} \nabla f(ty) \cdot y \,\mathrm{d}\sigma = \int_{|y|=1} \mathrm{d}\sigma \int_\varepsilon^1 \frac{d}{dt} f(ty)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{|y|=1} [-f(\varepsilon y)]\, \mathrm{d}\sigma \to -f(0)\omega_m.$$

参考文献

BD93 L. Báez-Duarte, ⇊, J. Math. Anal. Appl., 177(1993) 412–414.

dC76 M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.

Dei85 K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

FR97 B. Fine, G. Rosenberger, The fundamental theorem of algebra, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

Iva05 N. V. Ivanov, ⇊, Amer. Math. Monthly, 112(2005) 799–806.

Kan81 Y. Kannai, ⇊, Amer. Math. Monthly, 88(1981) 264–268.

Lax99 P. D. Lax, ⇊, Amer. Math. Monthly, 106(1999) 497–501.

Lax01 P. D. Lax, ⇊, Amer. Math. Monthly, 108(2001) 115–119.

LL[10] A. C. Lazer, M. Leckband, ⇊, Amer. Math. Monthly, 117(2010) 455–457.

LL[18] P. Liu, S. Liu, ⇊, Amer. Math. Monthly, 125 (2018) 941–943.

LZ[17] S. Liu, Y. Zhang, ⇊, J. Math. Study, 50(2017) 268–276.

Mil[78] J. Milnor, ⇊, Amer. Math. Monthly, 85(1978) 521–524.

Sen[00] A. Sen, ⇊, Amer. Math. Monthly, 107(2000) 842–843.

Tay[02] M. Taylor, ⇊, J. Math. Anal. Appl., 268(2002) 378–383.

Tho[94] J. A. Thorpe, Elementary topics in differential geometry, Springer-Verlag, New York, 1994.

Cui[13] 崔尚斌, 数学分析 (下册), 高等教育出版社, 2013.

HLW[09] 郇中丹, 刘永平, 王昆扬, 简明数学分析, 高等教育出版社, 2009.

LF[89] 林源渠, 方企勤, 数学分析习题集, 高等教育出版社, 1986.

Ma11 马建国, 数学分析 (下册), 科学出版社, 2011.

Mei11 梅加强, 数学分析 (第 2 版), 高等教育出版社, 2020.

OY03 欧阳光中, 姚允龙, 周渊, 数学分析 (下册), 复旦大学出版社, 2003.

WSY89 伍洪熙, 沈纯理, 虞言林, 黎曼几何初步, 北京大学出版社, 1989.

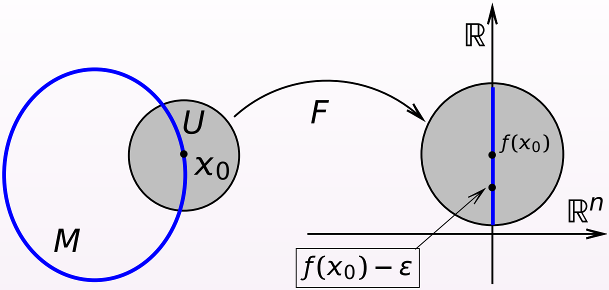
附录

* L- 乘数法的证明, $F(x) = (f(x), g^1(x), \ldots, g^n(x))$. 由 定理4 有

$$\min\{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\} \qquad F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\begin{aligned} g^1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ g^n(x) &= 0 \end{aligned} \qquad \operatorname{rank} F'(x_0) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g^1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g^n(x_0) \end{pmatrix} = n,$$

于是 $\nabla f(x_0) \in \operatorname{span}\left\{\nabla g^1(x_0), \ldots, \nabla g^n(x_0)\right\}$.


ℝ
F
U
x_0
$f(x_0)$
$\mathbb{R}^n$
M
$f(x_0)-\varepsilon$

* 余面积公式的“微元法"

设 $G\subset\mathbb{R}^m$, $f:G\to\mathbb{R}$.
$\Omega=f^{-1}[a,b]$, $g:\Omega\to\mathbb{R}$.

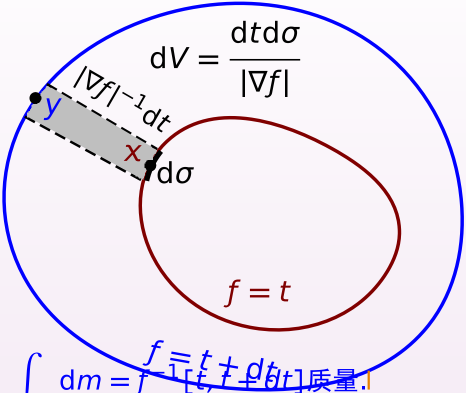
在 $x\in f^{-1}(t)$ 取面元 $\mathrm{d}\sigma$.
过 x 作法线交 $f^{-1}(t+\mathrm{d}t)$ 于 y.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t&=f(y)-f(x)\\&\approx\nabla f(x)\cdot(y-x),\end{aligned}$$

$$|y-x|=\frac{\mathrm{d}t}{|\nabla f(x)|}.$$

底 $\mathrm{d}\sigma$, 高 $|y-x|$ 的柱体的体积

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma}{|\nabla f(x)|},\quad \mathrm{d}m=\frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma.$$



$\int_{f=t}\mathrm{d}m=f^{-1}[t,t+\mathrm{d}t]$质量.

因此 Ω 的总质量为

$$\int_\Omega g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}t\int_{f=t}\frac{g(x)}{|\nabla f(x)|}\mathrm{d}\sigma.$$

✱ 链法则与 Cauchy-Binet 的应用

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^2}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial u^{m-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial u^{m-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^i} & \cdots & \frac{\partial y^2}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^i} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{m-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^i}{\partial u^{m-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial u^{m-1}} \end{pmatrix}$$

$(m-1)\times(m-1)$ $\quad$ $(m-1)\times m$ $\quad$ $m\times(m-1)$

由 Cauchy-Binet 即得

$$\frac{\partial(y^2,\ldots,y^m)}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y^2,\ldots,y^m)}{\partial(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots x^m)} \frac{\partial(x^1,\ldots,\hat{x}^i,\ldots x^m)}{\partial(u^1,\ldots,u^{m-1})}$$

✱ 重积分换元公式的常见证明

- 有些教材以不太严谨的方式 (随意略去高阶无穷小) 得到

$$\mathrm{Area}(T(\sigma)) \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{Area}(\sigma), \qquad \mathrm{diam}\,(\sigma) \to 0.$$

  并由此分析 Riemann 和做出证明.
- 另一些教材先对简单的变换进行证明, 再逐步过渡到一般情形. 证明虽然严谨, 却过于繁复.
- 又有教材把曲面 $S = \boldsymbol{r}(D)$ ($\boldsymbol{r} : D \to \mathbb{R}^3$) 的面积定义为

$$\mathscr{A}(S) = \iint_D |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

  作为特例, D 在变换 $T : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ 下的象的面积

$$\mathscr{A}(T(D)) = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{5}$$

  由此不难通过分析 Riemann 和证得换元公式. 循环论证的错误!
- 还有些教材运用 Green 公式来证明 (5), 再研究 Riemann 和.

定理11 (换元公式). 设 C^2- 变换 $T: D \to \Omega$,

$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

把 uv- 平面闭区域 D 的边界 ∂D 微分同胚地映成 xy- 平面闭区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$, $f \in C(\Omega)$, 则

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_D f(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{6}$$

证(dC[76]). 取 $Q \in C^1(\Omega)$ 使 $Q_x = f$. 再设 ∂D及 $\partial\Omega$ 的参方为

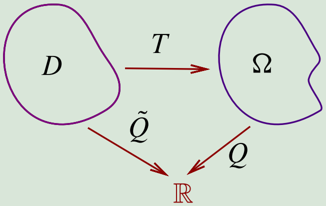
$$(u,v) = (u(t), v(t)), \quad (x,y) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t))),$$

$t \in [a,b]$. 记 $\tilde{Q} = Q \circ T$, 则

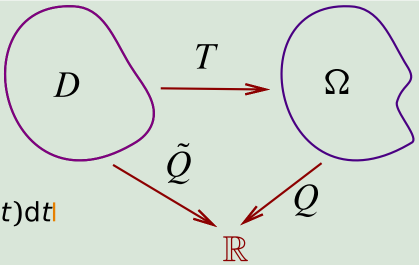
$$\left(\tilde{Q}y_v\right)_u - \left(\tilde{Q}y_u\right)_v = \tilde{Q}_u y_v - \tilde{Q}_v y_u$$

$$= \left(Q_x x_u + Q_y y_u\right) y_v - \left(Q_x x_v + Q_y y_v\right) y_u$$

$$= Q_x(x_u y_v - x_v y_u) = (f \circ T)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$



由 Green 公式,



$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_\Omega Q_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial\Omega} Q\mathrm{d}y$$
$$=\pm\int_a^b Q(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\dot{y}(t)\mathrm{d}t$$
$$=\pm\int_a^b \tilde{Q}(u(t),v(t))(y_u\dot{u}+y_v\dot{v})\mathrm{d}t$$
$$=\pm\oint_{\partial D}\left(\tilde{Q}y_u\right)\mathrm{d}u+\left(\tilde{Q}y_v\right)\mathrm{d}v=\pm\iint_D\left(\left(\tilde{Q}y_v\right)_u-\left(\tilde{Q}y_u\right)_v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\pm\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

注9. 用这种方法处理重积分换元公式, 必须先讲曲线积分、Green 公式.

附录

* 受 HLW[09] 启发, 在课程中我们讲授 $\mathbb{R}^m$ 中 k- 维曲面上的曲面积分. 简要讨论 $\mathbb{R}^m$ 中的平行 $2k$- 面体的体积之后, 设 $\mathbb{R}^m$ 中 k- 维曲面 S 的参数表示为 $x: U \to \mathbb{R}^m$, 其中
  - U 是 $\mathbb{R}^k$ 中 Jordan 可测的有界闭区域,
  - x 在 U° 单, $\operatorname{rank} x'(u) = k$, 这里

$$x'(u) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)_{m\times k}.$$

设 $f: S \to \mathbb{R}$ 连续, 我们定义

$$\int_S f \mathrm{d}\sigma = \int_U f(x(u))\sqrt{\det\left[(x'(u))^{\mathrm{T}} x'(u)\right]}\mathrm{d}u.$$

由 k- 重积分换元公式易证右端的 k- 重积分与 S 的参数表示无关.

Thank you!

http://www.liusb.com